<u>Θεώρημα</u>: Κάθε μη-αρνητικός συμμετρικός πίνακας $A\in M_n(\mathbb{R})$ έχει μοναδική τετραγωνική ρίζα, δλδ υπάρχει συμμετρικός πίνακας $B\in M_n(\mathbb{R})$: $B^2=A$ και τότε γράφουμε $B=\sqrt{A}$. (ο B είναι επίσης μη-αρνητικός).

<u>Πχ</u> || $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

$P_A(t)=|A-tI_3| = -(t-2)^2(t-4)$

ιδιοτιμές του A: $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \text{ (διπλή)} \\ \lambda_2 = 4 \text{ (απλή)}. \end{cases}$

Τότε υπάρχει ορθογώνιος πίνακας P: ${}^tPAP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

<u>$V(2)$</u> : ΟΚΒ $\left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ και $V(4)$: ΟΚΒ $\left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ 0 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\}$.

Τότε $P=\begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & 0 & -\sqrt{2}/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2}/2 & 0 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ και ${}^tPAP=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\Rightarrow A = P\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}{}^tP$. Θέτουμε $B = P\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}{}^tP = \cdots$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2+1 & 0 & \sqrt{2}/2-1 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2}/2-1 & 0 & \sqrt{2}/2+1 \end{pmatrix} = \sqrt{A}$$

Άσκηση: $A>0 \Rightarrow A^{-1}>0$

Λύση: Γνωρίζουμε ότι $|A| = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n$, όπου $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A. Επειδή $A>0$, γνωρίζουμε ότι κάθε ιδιοτιμή του είναι θετική και άρα $|A|>0$. Ιδιαίτερα $|A| \neq 0$, δηλ. ο A είναι αντιστρέψιμος. Άρα, υπάρχει ο A^{-1}.

Τότε: $A^{-1}\cdot A = I_n = A\cdot A^{-1} \Rightarrow {}^t(A^{-1}A) = {}^tI_n = I_n \Rightarrow {}^tA\cdot{}^t(A^{-1}) = I_n$ και παρόμοια ${}^t(A\cdot A^{-1}) = I_n \Rightarrow {}^t(A^{-1})\,{}^tA = I_n$. Άρα ο ${}^tA$ αντιστρέψιμος και $({}^tA)^{-1} = {}^t(A^{-1}) \xRightarrow{{}^tA=A} {}^t(A^{-1}) = A^{-1} \Rightarrow$ ο A^{-1}: συμμετρικός

A: συμμετρικός $\xRightarrow{\text{Φασμ. Θεωρ.}} \exists$ ορθογώνιος πίνακας P:

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix} \Rightarrow A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}\underbrace{{}^tP}_{P^{-1}} \Rightarrow A^{-1} = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}^{-1}P^{-1}$$

$$= P\begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix}\underbrace{{}^tP}_{P^{-1}} \Rightarrow {}^tPA^{-1}P = \begin{pmatrix} \lambda_1^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n^{-1} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{οι αριθμοί } \lambda_i^{-1}>0,\ i=1,\ldots,n$$

είναι οι ιδιοτιμές του συμμετρικού πίνακα A^{-1} και άρα $A^{-1}>0$.

Άσκηση: Έστω $A,B>0$ και $\kappa,\lambda\in\mathbb{R}$ με $\kappa,\lambda>0$. Τότε: $\kappa A+\lambda B>0$. (με τον ορισμό)

Λύση: ${}^t(\kappa A+\lambda B) = {}^t(\kappa A) + {}^t(\lambda B) = \kappa\,{}^tA + \lambda\,{}^tB = \kappa A + \lambda B$. Άρα ο πίνακας $\kappa A+\lambda B$ είναι συμμετρικός.

Αρκεί ν.δ.ο $\forall X\in\mathbb{R}^n$: $\langle(\kappa A+\lambda B)X, X\rangle>0$, όπου $X\neq 0$

$$\langle(\kappa A+\lambda B)X,X\rangle = \langle\kappa AX+\lambda BX, X\rangle = \underbrace{\kappa}_{>0}\underbrace{\langle AX,X\rangle}_{>0} + \underbrace{\lambda}_{>0}\underbrace{\langle BX,X\rangle}_{>0} > 0$$

Άρα $\kappa A+\lambda B>0$

όπου $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ Για κάθε $k=1,\dots,n$, θεωρούμε τον πίνακα $k \times k$, ο οποίος σχηματίζεται από τις k πρώτες γραμμές και τις k πρώτες στήλες του πίνακα A, ο οποίος συμβολίζεται με $A_k \in M_k(\mathbb{R})$.

Η ορίζουσα $D_k = |A_k|$, $\forall k=1,\dots,n$ καλείται η <u>κύρια ελάσσονα ορίζουσα τάξης k</u> του πίνακα A.

<u>Κριτήριο Sylvester</u>: $A>0 \Leftrightarrow D_k>0, \forall k=1,\dots,n$

<u>Πχ</u> // $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

$D_1 = 2$, $D_2 = 3>0$, $D_3 = |A| = 4>0$

Κριτήριο Sylvester: <u>$A>0$</u>

<u>Πχ</u> // $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$ $D_1 = 2>0$, $D_2 = 3>0$, $D_3 = |A| = 0$

Άρα <u>$A \not> 0$</u>

<u>Άσκηση</u>: Να βρεθούν όλοι οι θετικοί ορθογώνιοι πίνακες.

Θα δειχθεί ότι: για έναν $A \in M_n(\mathbb{R})$, δύο από τις παρακάτω τρεις συνθήκες συνεπάγονται τη τρίτη:

(1) A: ορθογώνιος

(2) A: συμμετρικός

(3) $A^2 = I_n$

Δηλαδή (1),(2) $\Rightarrow$ (3), (2),(3) $\Rightarrow$ (1), (1),(3) $\Rightarrow$ (2).

Λυση: ①,② => ③ : A: ορθογώνιος => $^tA = A^{-1}$ } => $A^{-1} = A$
A: συμμετρικός => $^tA = A$ } => $A^2 = I_n$

②,③ => ① : $A^2 = I_n$ => $A A = I_n$ } => $A^tA = I_n = A^tA$
$^tA = A$ } => A: ορθογώνιος

①,③ => ②: A: ορθογώνιος => $A^{-1} = {}^tA$ }
Επειδή $A^2 = I_n => A^{-1} = A$ } => $A = {}^tA$
δηλ A: συμμετρικός.

Εστω A: ορθογώνιος και θετικός. Τότε ιδιαίτερα A: ορθογώνιος και συμμετρικός και άρα $A^2 = I_n$.
Επειδή ο A: συμμετρικός, έπεται ότι όλες οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί αριθμοί.
A: ορθογώνιος, έπεται ότι οι ιδιοτιμές του είναι οι: ± 1.
Άρα, οι ιδιοτιμές του A είναι : 1, -1 και επειδή $A>0$, αναγκαστικά, η μόνη ιδιοτιμή του A είναι η $\lambda = 1$. Απο το Φασμ. Θεωρ =>
=> $\exists$ ορθογώνιος P: $^tPAP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = I_n$

=> $A = P I_n {}^tP = P^tP = I_n$

Άρα: Αν $A \in M_n(\mathbb{R})$, τότε $A = I_n \iff$ A: θετικός κ' ορθογώνιος.

ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΜΟΡΦΕΣ

Έστω $(E, \langle , \rangle)$ ένας Ευκλείδειος χώρος, διάστασης $n = \dim_{\mathbb{R}} E$.

Ορισμός: Μια απεικόνιση $q: E \to \mathbb{R}$, $\vec{x} \mapsto q(\vec{x})$ καλείται τετραγωνική μορφή $\Leftrightarrow \forall \vec{x} \in E: q(\vec{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j$, όπου:

① $\beta = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$: ΟΚΒ του E

② $\vec{x} = x_1 \vec{e_1} + \dots + x_n \vec{e_n}$

③ $A = (a_{ij})$ είναι ένας συμμετρικός πίνακας, ο οποίος καλείται ο πίνακας της q στην ΟΚΒ β.

Τότε: $q(\vec{x}) = q(x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} x_k^2 + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{n} a_{ij} x_i x_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} x_k^2 + 2 \sum_{1 \le i < j \le n} a_{ij} x_i x_j$

Πχ// Στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ χρησιμοποιούμε πάντα τις κανονικές βάσεις, και τότε γράφουμε με x, y, z αντί x_1, x_2, x_3 τις συνιστώσες ενός διανύσματος $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ ως προς τη κανονική βάση.

① $\mathbb{R}^2: \forall \vec{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2: q(\vec{x}) = q(x, y) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + 2a_{12}xy$

② $\mathbb{R}^3: \forall \vec{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3: q(\vec{x}) = q(x, y, z) =$

$= a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz$

Για παράδειγμα: $q(x, y) = 2x^2 + 4y^2 + 2xy$ με πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} = A$

$q(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^2 + xy + 2yz + 3xz$

με πίνακα $\begin{pmatrix} 2 & 1/2 & 3/2 \\ 1/2 & 3 & 1 \\ 3/2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A$

Εστω $q(\vec{x}) = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} x_k^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij} x_i x_j$ μια τετραγωνική μορφή επί του E με πίνακα $A=(a_{ij})$

Εστω $\beta = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ η ΟΚΒ και $\vec{x} = x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}$

και $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ η στήλη του $\vec{x}$ στην ΟΚΒ β.

Ισχυρισμός: $q(\vec{x}) = {}^tXAX = \langle AX, X \rangle$

Πράγματι, $^tXAX = (x_1\ x_2 \dots x_n) \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} =$

$= (x_1\ x_2 \dots x_n) \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix} = x_1(a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n) + \dots \dots + x_n(a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n)$

$= \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j = q(\vec{x})$. Παρόμοια: $q(\vec{x}) = \langle AX, X \rangle$.

Εστω $q: E \to \mathbb{R}$ μία τετραγωνική μορφή επί του E, με πίνακα $A=(a_{ij})$ στην ΟΚΒ $\beta = \{\vec{e_1}, \dots, \vec{e_n}\}$ και τότε:

$q(\vec{x}) = q(x_1\vec{e_1} + \dots + x_n\vec{e_n}) = {}^tXAX = \sum_{k=1}^{n} a_{kk} x_k^2 + 2 \sum_{1\le i<j\le n} a_{ij} x_i x_j$, όπου: ①

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ Επειδή ο A είναι συμμετρικός $\overset{\Theta\Theta}{\Longrightarrow} \exists$ ορθογώνιος πίνακας $P=(p_{ij})$ έτσι ώστε $^tPAP = \Delta = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$, όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του A. $\Rightarrow$

$\overset{②}{\Rightarrow} A = P\Delta\,{}^tP$. Άρα από τις ①, ②: $q(\vec{x}) = {}^tXAX = {}^tX(P\Delta\,{}^tP)X =$

$= ({}^tXP)\Delta({}^tPX) = {}^t({}^tPX) \cdot \Delta \cdot ({}^tPX)$

$\Rightarrow \boxed{q(\vec{x}) = {}^tX' \Delta X'}$, όπου $\boxed{X' = {}^tPX}$

Θέτουμε $\vec{e_j}' = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}\vec{e_i}, \forall j = 1,2,\dots,n$ και έστω $\beta' = \{\vec{e_1}', \dots, \vec{e_n}'\}$ και τότε γνωρίζουμε ότι το σύνολο β' είναι μια βάση του E και $M_{\beta}^{\beta'} = P$. Επειδή ο P: ορθογώνιος, έπεται ότι η β': ΟΚΒ. Επιπλέον, το $x' = \begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} = {}^tPX$ και $\vec{x} = x_1'\vec{e_1}' + \dots + x_n'\vec{e_n}'$

Τέλος: $q(\vec{x}) = q(x_1'\vec{e_1}' + \dots + x_n'\vec{e_n}') = {}^tX'\Delta X' = (x_1' \dots x_n')\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1' \\ \vdots \\ x_n' \end{pmatrix} =$

$= \lambda_1(x_1')^2 + \dots + \lambda_n(x_n')^2$

<u>Θεώρημα Κυρίων Αξόνων</u>: Για κάθε τετραγωνική μορφή $q: E \to \mathbb{R}$, ορισμένη επί ενός Ευκλείδειου χώρου E n-διάστασης, υπάρχει ΟΚΒ $\beta' = \{\vec{e_1}', \dots, \vec{e_n}'\}$ του E, έτσι ώστε:

$\forall \vec{x} = x_1\vec{e_1}' + \dots + x_n\vec{e_n}' \in E$: $\boxed{q(\vec{x}) = \lambda_1(x_1')^2 + \dots + \lambda_n(x_n')^2}$

όπου $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ είναι οι ιδιοτιμές του πίνακα A της q.

Τα διανύσματα $\vec{e_1}', \dots, \vec{e_n}'$ καλούνται κύριοι άξονες της τετραγωνικής μορφής q.

<u>Παρ/</u> $q: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $q(x,y) = 5x^2 - 6xy + 5y^2$

Πίνακας της q στην κανονική βάση $\beta = \{\vec{e_1} = (1,0), \vec{e_2} = (0,1)\}$ του $\mathbb{R}^2$, $A = \begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$

$P_A(t) = \begin{vmatrix} 5-t & -3 \\ -3 & 5-t \end{vmatrix} = (t-2)(t-8)$ Ιδιοτιμές του A: $\begin{cases} \lambda_1 = 2 \\ \lambda_2 = 8 \end{cases}$

Η τετραγωνική μορφή στους κύριους άξονές της είναι:

$q(x', y') = 2(x')^2 + 8(y')^2$

$\bullet V(2): OKB \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\}$ $\bullet V(8): OKB \left\{ \begin{pmatrix} -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 \end{pmatrix} \right\}$ (8)

Τότε $P = \begin{pmatrix} \sqrt{2}/2 & -\sqrt{2}/2 \\ \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \end{pmatrix}$ και τότε οι κύριοι άξονες της q

είναι $\vec{e_1}' = \left(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$, $\vec{e_2}' = \left(-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2\right)$

Αν $(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $x' = {}^tPx \Rightarrow \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = {}^tP \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ και $(x,y) = x'\vec{e_1}' + y'\vec{e_2}'$

Έστω $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \underbrace{5x^2 - 6xy + 5y^2}_{q} = 8\}$

Στους κύριους άξονες της q το σύνολο C έχει τη μορφή

$C = \{(x',y') \in \mathbb{R}^2 / 2(x')^2 + 8(y')^2 = 8$

έλλειψη $\rightarrow$ $\dfrac{(x')^2}{2^2} + \dfrac{(y')^2}{1^2} = 1$